12. Komplementarni podprostori

(12.01) Komplementarni podprostori

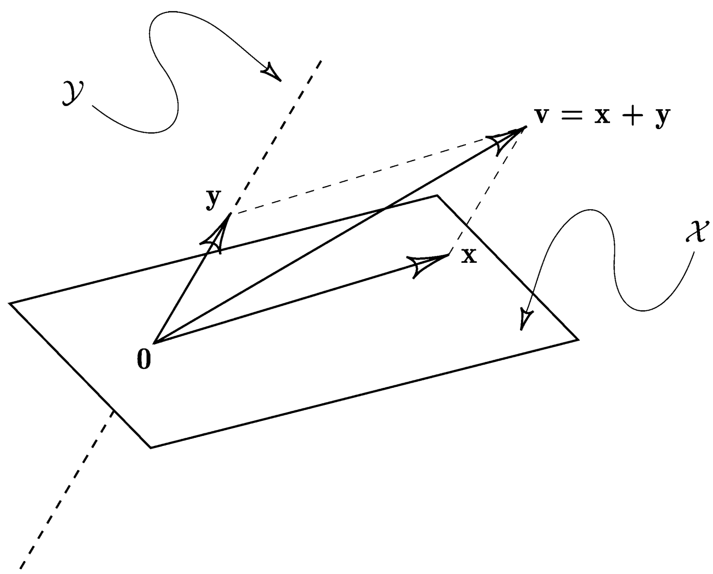
Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su <u>*komplementarni*</u> podprostori kadgod je

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \quad \text{i} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0},$$

i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je <u>*direktna suma*</u> od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. (Suma podprostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ je prema definiciji skup $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} | \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \text{ i } \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\}$.)

• Za vektorski prostor $\mathcal{V}$ sa podprostorima $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ koji imaju redom baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.

- ▷ $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.
- ▷ Za svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ takvi da $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.
- ▷ $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$. ◇



(12.02) Projekcija

Pretpostavimo da je $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ tako da za svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ takvi da $v = x + y$.

• Vektor $\boldsymbol{x}$ zovemo <u>*projekcija*</u> od $\boldsymbol{v}$ na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$.

• Vektor $\boldsymbol{y}$ zovemo projekcija od $\boldsymbol{v}$ na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$. ◇

(12.03) Projektori

Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$ tako da se svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ može na jedinstven način prikazati kao suma $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$. Jedinstveni linearni operator P definisan sa $P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$ zovemo <u>*projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$*</u>, i P ima sljedeće osobine.

• $P^2 = P$ (P je idempotent).

• $I - P$ je komplementarni projektor na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.

• $im(P) = \{\boldsymbol{x} \,|\, P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$ (je skup "fiksiranih tački" za P).

• $im(P) = ker(I - P) = \mathcal{X}$ i $im(I - P) = ker(P) = \mathcal{Y}$.

• Ako je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}^n$, tada je P dat sa

$$P = [X|\mathbf{0}][X|Y]^{-1} = [X|Y] \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} [X|Y]^{-1},$$

gdje su kolone od X i Y redom baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$. $\diamond$

(12.04) Projektori i idempotenti

Linearni operator P definisan na $\mathcal{V}$ je projektor ako i samo ako $P^2 = P$. $\diamond$

Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori od $\mathbb{R}^3$ čije su baze redom

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \right\} \quad i \quad \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Objasniti zašto su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori od $\mathbb{R}^3$.

(b) Odrediti projektor P na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ kao i komplementarni projektor Q na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.

(c) Odrediti projekciju od $v = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.

(d) Provjeriti da li su i P i Q idempotenti.

(e) Provjeriti da li je $im(P) = \mathcal{X} = ker(Q)$ i $ker(P) = \mathcal{Y} = im(Q)$.

Rj.:

(a) Za vektorski prostor $\mathcal{V}$ sa podprostorima $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ koje imaju redom baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne

$\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \iff$ za $\forall v \in \mathcal{V}$ $\exists!\, x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ takvi da $v = x + y$ $\iff$ $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$

Provjerimo da li je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan skup.

kolone matrice $A_{m \times n}$ formiraju linearno nezavisan skup $\iff ker(A) = \{0\} \iff rang(A) = n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{II_v - III_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je linearno nezavisan skup

Da li je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset$? ZAŠTO?

Prema tome $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ su komplementarni podprostori od $\mathbb{R}^3$.

(b) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ (ili $\mathbb{C}^n$). Tada projektor P na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ je dat sa $P=[X \mid 0][X \mid Y]^{-1}$ gdje su kolone za X i Y redom baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$.

$I-P$ je komplementarni projektor na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.

$$[X \mid 0]=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix},\quad [X \mid Y]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix},\quad [X \mid Y]^{-1}=?$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right]\underset{III_v-I_v}{\overset{II_v-I_v}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{array}\right]\overset{III_v-II_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right]$$

$$\underset{I_v-II_v}{\overset{II_v-III_v}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right]\Rightarrow [X \mid Y]^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$P=[X \mid 0][X \mid Y]^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{bmatrix}.$$

$$Q=I-P=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix}.$$

(c) Projekcija od $v=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$ je

$$Qv=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

d)

$$P^2=P\cdot P=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{bmatrix}=P$$

P i Q su idempotenti

$$Q^2=Q\cdot Q=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{bmatrix}=Q$$

(e) $\operatorname{im}(P) = \{Px \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ = prostor generiran pomoću kolona matrice P

$\ker(Q) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Qx = 0\}$

$\mathcal{X} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$

Znamo da

$\operatorname{im}(A^T) = \operatorname{im}(B^T)$ akko $A \overset{red}{\sim} B$

Pa neka je $A^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix} = P$; $B^T = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

primjetimo da je $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{im}(A^T) = \operatorname{im}(P)$

$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{im}(B^T) = \mathcal{X}$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 3\\ -1 & -2 & -2\end{bmatrix} \overset{III_v + II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{II_v - I_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{II_v : 3}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{II_v - III_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = E_A$$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix} \overset{II_v - I_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{I_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = E_B$$

Odavde vidimo da je $\operatorname{im}(P) = \mathcal{X}$.

Odredimo bazu za $\ker(Q)$.

$$Qx = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$[Q \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 3}{\overset{II_v - I_v \cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c}-x_2 + x_3 = 0\\ x_2 = x_3\end{array}$$

$\operatorname{rang} Q = \operatorname{rang} \overline{Q} < 3$

2 promjenjive uzimam proizvoljno npr

$x_1 = t,\ x_2 = s \Rightarrow x_3 = s \qquad x = \begin{pmatrix}t\\s\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot t + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot s$

$\ker(Q) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Neka je

$$C^T = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$ Tada je $\operatorname{im}(C^T) = \ker Q$

$$C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} = E_c$$

Prema tome $\operatorname{im}(P) = \mathcal{X} = \ker(Q)$.

Da bi pokazali da je $\ker(P) = \mathcal{Y} = \operatorname{im}(Q)$, između ostalog primijetimo da $P\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ zajedno sa činjenicom da je $\dim(\ker(P)) = 3 - \operatorname{rang}(P)$.

Za vježbu detaljno raspisati ovaj zadnji slučaj ($\ker(P) = \mathcal{Y} = \operatorname{im}(Q)$?).

Konstruisati primjer za par netrivijalnih komplementarnih podprostora iz $\mathbb{R}^5$, i objasniti zašto je dati primjer tačan.

Rj. Znamo da za vektorski prostor V sa podprostorima X i Y koji redom imaju baze $\mathcal{B}_X$ i $\mathcal{B}_Y$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne

$$V = X \oplus Y \iff \forall v \in V\ \exists!\, x \in X, y \in Y\ \ v = x + y \iff \mathcal{B}_X \cap \mathcal{B}_Y = \emptyset\ ;\ \mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y \text{ je baza za } V$$

Posmatrajmo proizvoljnu bazu $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ za $\mathbb{R}^5$. Ako stavimo

$$X = \text{span}\underbrace{\{x_1, x_2\}}_{\mathcal{B}_X}, \quad Y = \text{span}\underbrace{\{x_3, x_4, x_5\}}_{\mathcal{B}_Y}$$

tada imamo da je $\mathcal{B}_X \cap \mathcal{B}_Y = \emptyset$ (ZAŠTO?) ;

$\mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y$ je baza za $\mathbb{R}^5$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^5 = X \oplus Y.$$

(#) Konstruisati primjer koji će pokazati da ako $\mathcal{V}=\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ ali $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}\neq 0$, tada postoji vektor $v\in\mathcal{V}$ koji se može prikazati na dva različita načina

$$v=x_1+y_1 \quad i \quad v=x_2+y_2$$

gdje $x_1,x_2\in\mathcal{X}$ i $y_1,y_2\in\mathcal{Y}$ ali $x_1\neq x_2$ i $y_1\neq y_2$.

Rj. Posmatrajmo prostor $\mathcal{V}=\mathbb{R}^3$ sa bazom $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

i neka je $\mathcal{X}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{Y}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Tada primjetimo da je

$$x_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{X}$$

$$y_1=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathcal{Y}$$

$$x_2=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{X}$$

$$y_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathcal{Y}$$

i $$x_1+y_1=\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix}, \quad x_2+y_2=\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix}$$

Isto tako mogli smo posmatrati i $\mathbb{R}^2$ i skoviti

$\mathcal{X}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \middle| \alpha\in\mathbb{R}\right\}$, $\mathcal{Y}=\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2=\mathcal{X}+\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}\neq 0$

$\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y-x\end{pmatrix} \quad i \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix}$

(#) Neka su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{K}$, redom, podprostori $n \times n$ simetričnih i nakrivo-simetričnih matrica (prisjetimo se, za matricu A kažemo da je simetrična kadgod je $A = A^T$, a nakrivo-simetrična kadgod $A = -A^T$). Objasniti zašto je $Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{K}$. Šta je projekcija od $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ na $\mathcal{S}$ paralelno sa $\mathcal{K}$?

Uputa: Ako je A kvadratna matrica

(a) Pokazati da $A + A^T$ je simetrična a $A - A^T$ je nakrivo-simetrična.

(b) Dokazati da postoji jedan i samo jedan način da napišemo matricu A kao sumu simetrične i nakrivo-simetrične matrice.

Rj: Prvo pokažimo da je $A + A^T$ simetrična, a $A - A^T$ nakrivo simetrična matrica.

Neka je $S = A + A^T$ i $K = A - A^T$. Tada

$$S^T = (A + A^T)^T = A^T + A^{T^T} = A^T + A = S$$

$$K^T = (A - A^T)^T = A^T - A^{T^T} = A^T - A = -(A - A^T) = -K$$

Da li možemo matricu A napisati kao sumu simetrične i nakrivo-simetrične matrice. Primjetimo

$$S + K = (A + A^T) + (A - A^T) = 2A$$

Prema tome $A = \dfrac{S+K}{2} = \dfrac{S}{2} + \dfrac{K}{2} = \dfrac{A + A^T}{2} + \dfrac{A - A^T}{2}$

tj. $A = \dfrac{S}{2} + \dfrac{K}{2}$ je jedna takva dekompozicija. Da bi pokazali da je jedinstvena, pretpostavimo da je

$A = X + Y$ gdje je $X = X^T$ i $Y = -Y^T$. Odavde slijedi $A^T = X^T + Y^T = X - Y \Rightarrow A + A^T = 2X$ pa je $X = \frac{A+A^T}{2} = \frac{S}{2}$. Sličan argument pokazuje da je $Y = \frac{A-A^T}{2} = \frac{K}{2}$.

Znamo da

$$\underline{V = X \oplus Y} \Leftrightarrow \underline{\forall v \in V \ \exists! x \in X, y \in Y \ v = x + y \Leftrightarrow \begin{matrix} B_X \cap B_Y = \emptyset \\ B_X \cup B_Y \text{ baza za } V \end{matrix}} \quad \dots (*)$$

Pokazali smo da se svaka matrica $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ može jedinstveno napisati kao suma simetrične i nakrivo-simetrične matrice prema formuli

$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$$

pa $(*)$ garantuje da $Mat_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{K}$. Prema definiciji, projekcija na $\mathcal{S}$ paralelno sa $\mathcal{K}$ je $\mathcal{S}$ komponenta od A - naime $\frac{A+A^T}{2}$. Za datu matricu, ovo je

$$\frac{A+A^T}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

(#) Za neki vektorski prostor, neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ dva podprostora redom sa bazama $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

(a) Dokazati da $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$ akko $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ je linearno nezavisan skup.

(b) Da li nezavisnost od $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ povlači $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$?

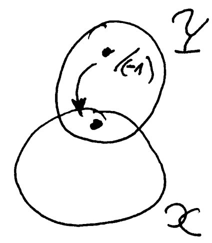
(c) Ako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan skup, da li to povlači da su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori? Zašto?

R;

(a) "$\Rightarrow$" Pretpostavimo da je $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$. Da bi pokazali da je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisno, napišimo

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i}_{\in \mathcal{X}} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j}_{\in \mathcal{Y}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in \mathcal{X} \text{ i } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in \mathcal{Y} \quad \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$$

(zato što su i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisni)

"$\Leftarrow$" Obrnuto, ako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan, tada

$v \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow \exists \alpha_i, \beta_j \quad v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \quad \text{i} \quad v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$$

(zato što je $\mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y$ linearno nezavisan)

$$\Rightarrow v = \mathbf{0}.$$

(b) NE. Npr. Neka je X xOy-ravan a neka je Y yOz ravan u $\mathbb{R}^3$ redom su bazama $\mathcal{B}_X = \{e_1, e_2\}$ i $\mathcal{B}_Y = \{e_2, e_3\}$. Imamo da je $\mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y = \{e_1, e_2, e_3\}$ ali $X \cap Y \neq 0$.

(c) NE. Činjenica da je $\mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y$ linearno nezavisno ne garantuje da je $X + Y$ čitav prostor npr. posmatrajmo dvije različite linije u $\mathbb{R}^3$.

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$ i neka je P projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$. Pokazati da P ima sljedeće osobine

(i) $I-P$ je komplementarni projektor - projektor na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.

(ii) $im(P) = \{x \mid Px = x\}$ (skup "fiksnih tački" za P)

(iii) $im(P) = ker(I-P) = \mathcal{X}$ i

$im(I-P) = ker(P) = \mathcal{Y}$

Rj. Znamo da

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \iff \forall v \in \mathcal{V}\ \exists!\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\ \ v = x + y \iff$$

$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \phi$
$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$
gdje su $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ redom baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$

(i)
Neka je v proizvoljni vektor iz $\mathcal{V}$. Znamo da $\exists!\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ t.d. $v = x + y$. Primjetimo da $v = x + y = Pv + y \Rightarrow$
$\Rightarrow y = v - Pv = (I-P)v$. Drugim riječima
$\forall v \in \mathcal{V}\ \ (I-P)v = y \in \mathcal{Y}$ (gdje je $v = x+y$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$)

(ii) Pokažimo da je $im(P) \subseteq \{x \mid Px = x\}$ i $\{x \mid Px = x\} \subseteq im(P)$

Izaberimo proizvoljno $x \in \{x \mid Px = x\} \Rightarrow Px = x \Rightarrow$
$x \in \{Px \mid x \in \mathcal{V}\} \Rightarrow x \in im(P) \Rightarrow \{x \mid Px = x\} \subseteq im(P)$

Sad izaberimo proizvoljno $x \in im(P) \Rightarrow x = Py$ za neko $y \in \mathcal{V}$
$\Rightarrow Px = P^2 y = Py = x$ tj. $Px = x \Rightarrow x \in \{x \mid Px = x\} \Rightarrow im(P) \subseteq \{x \mid Px = x\}$

(iii) Iskoristit ćemo osobinu (ii) (koju smo upravo dokazali) zajedno sa definicijom projektora na $\mathcal{X}$
$$x \in \mathcal{X} \iff Px = x \iff x \in im(P)$$
Za vježbu pokazati da je $im(I-P) = ker(P) = \mathcal{Y}$.

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$. Pokazati da ako je $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ tada za svaki $v \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ takvi da $v = x + y$.

Rj.

Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ i $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$, i u ovom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što obilježavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Prema definiciji $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \{x + y \mid x \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y}\}$. Kako je $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ to za svaki $v \in \mathcal{V}$ $\exists x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ takvi da

$$v = x + y.$$

Da bi pokazali jedinstvenost, pretpostavimo da postoje dva načina da napišemo vektor $v \in \mathcal{V}$ kao "nešto iz $\mathcal{X}$ plus nešto iz $\mathcal{Y}$". Pa neka je

$$v = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \quad \text{gdje } x_1, x_2 \in \mathcal{X} \text{ i } y_1, y_2 \in \mathcal{Y}.$$

Kako je $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ to je $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$, pa imamo

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Rightarrow \underbrace{x_1 - x_2}_{\in \mathcal{X}} = \underbrace{y_2 - y_1}_{\in \mathcal{Y}} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 - x_2 \in \mathcal{X} \\ \text{i} \\ x_1 - x_2 \in \mathcal{Y} \end{array} \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$$

tj. $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Prema tome $\forall v \in \mathcal{V}$ $\exists!\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ t.d. $v = x + y$.

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, koji, redom, imaju baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$. Pokazati da ako za svaki $v \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ taki da $v = x + y$ tada

i) $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset$

ii) $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$.

Rj.

Kako $\forall v \in \mathcal{V}$ $\exists x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ t.d. $v = x + y$ imamo da je $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$. Od ranije znamo da

ako $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ generišu $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ redom tada $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$

Prema tome kako $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ generiše $\mathcal{X}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{Y}$ to $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$. Iz čega slijedi da $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ mora biti generator skup za $\mathcal{V}$. Da bi pokazali da je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisno, neka je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$, i pretpostavimo da

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j y_j .$$

Ovo je jedan način da izrazimo $\mathbf{0}$ kao "nešto iz $\mathcal{X}$ plus nešto iz $\mathcal{Y}$," dok je $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ drugi način. Prema tome, pretpostavka zadatka garantuje da $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = 0$ i $\sum_{j=1}^{s} \beta_j y_j = 0$, pa prema tome $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ su linearno nezavisni. Prema tome $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je linearno nezavisno (a kako još generiše $\mathcal{V}$) to je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ baza za $\mathcal{V}$.

ZA VJEŽBU OBJASNITI ZAŠTO JE $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset$

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, koji imaju redom baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$. Pokazati da, ako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \phi$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$ tada

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}.$$

Rj: Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod je $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ i $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$, i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Od ranije znamo da za proizvoljna dva podprostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$

$$\dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \dim(\mathcal{X}) + \dim(\mathcal{Y}) - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$$

Ako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ baza za $\mathcal{V}$ tada je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan skup i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{V}$. Od ranije znamo da

$$\mathcal{S}_{\mathcal{X}} \text{ generiše } \mathcal{X},\ \mathcal{S} \text{ generiše } \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{Y}} \text{ generiše } \mathcal{X}+\mathcal{Y}$$

Kako $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ generiše $\mathcal{X}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{Y}$ to $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$, a kako je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ linearno nezavisan skup to je $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ baza za $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \text{ baza za } \mathcal{V} \\ \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \text{ baza za } \mathcal{X}+\mathcal{Y} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{X}+\mathcal{Y} \quad \ldots (1)$$

a imamo i da je $\dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) =$
$= \dim(\mathcal{X}) + \dim(\mathcal{Y}) - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \Rightarrow \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 0$ ili ekvivalentno $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0 \quad \ldots (2) \quad (1)$ i $(2) \Rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tako da se svaki vektor $v \in \mathcal{V}$ može napisati na jedinstven način u obliku $v = x + y$, gdje je $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$. Dat je operator P definisan sa $Pv = x$. Pokazati da

i) P je linearni operator

ii) P je jedinstven

iii) $P^2 = P$ (P je idempotent)

Napomena: <u>Jedinstveni linearni operator P definisan sa $Pv = x$ nazivamo projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$.</u>

Rj.

i) Neka su $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ proizvoljna dva vektora. Kako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektori v_1 i v_2 se na jedinstven način mogu napisati u obliku $v_1 = x_1 + y_1$ i $v_2 = x_2 + y_2$ za neke $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$.

$$P(\alpha v_1 + v_2) = P(\alpha(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) = \alpha x_1 + x_2 = \alpha P v_1 + P v_2$$

P je linearan operator

ii) Ako su P_1 i P_2 dva operatora koji zadovoljavaju dati uslov tada $P_1 v = P_2 v$ za $\forall v \in \mathcal{V}$ iz čega slijedi

$$P_1 = P_2$$

iii) Primjetimo da je $P^2 v = P(Pv) = Px = x = Pv$ za $\forall v \in \mathcal{V}$

$$\Rightarrow \quad P^2 = P$$

(#) Pretpostavimo da je $\mathbb{R}^n = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, gdje je $\dim \mathcal{X} = r$, i neka je P projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$. Objasniti zašto postoje matrice $X_{n\times r}$ i $A_{r\times n}$ takve da

$$P = XA \quad i \quad AX = I_{r\times r}$$

gdje je $\operatorname{rang}(X) = \operatorname{rang}(A) = r$ (ovo zovemo potpuna-rang faktorizacija matrice P)

Rj.

Projektori

Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ (ili $\mathbb{C}^n$). Projektor P na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ je dat sa

$$P = [X \mid 0][X \mid Y]^{-1} = [X \mid Y]\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[X \mid Y]^{-1}$$

gdje su kolone od X i Y redom baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$.

Znamo da je projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ matrica $P = [X \mid 0][X \mid Y]^{-1}$ gdje su kolone od X i Y baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ redom. Ako je $[X_{n\times r} \mid Y]^{-1} = \left(\dfrac{A_{r\times n}}{C}\right)$ tada

$$P = [X \mid 0][X \mid Y]^{-1} = [X_{n\times r} \mid 0]\left[\dfrac{A_{r\times n}}{C}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \\ \vdots \\ — a_r — \\ — c_{r+1} — \\ \vdots \\ — c_n — \end{bmatrix}_{n\times n} =$$

$$= X_{n\times r} A_{r\times n}$$

Nesingularnost od $[X \mid Y]$ i $\left(\dfrac{A}{C}\right)$ garantuju da X

ima potpun kolona rang, a A ima potpun red rang, tj.

$$\operatorname{rang}(A) = r \qquad \operatorname{rang}(X) = r.$$

Pokažimo još da je $AX = I_{r\times r}$.

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [X \,\vdots\, Y]^{-1}[X \,\vdots\, Y] = \begin{pmatrix} A_{r\times n} \\ \hline C \end{pmatrix}[X_{n\times r} \,\vdots\, Y] =$$

$$= \begin{pmatrix} AX & AY \\ CX & CY \end{pmatrix} \Rightarrow AX = I_{r\times r}.$$

(#) Za realan ili kompleksan vektorski prostor, neka je E projektor na $\mathcal{X}_1$ paralelno sa $\mathcal{Y}_1$, i neka je F projektor na $\mathcal{X}_2$ paralelno sa $\mathcal{Y}_2$. Dokazati da je $E+F$ projektor ako i samo ako $EF = FE = \mathbf{0}$.

Rj:

Projektori i idempotenti

Linearni operator P na V je projektor ako i samo ako $P^2 = P$.

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da je $EF = FE = \mathbf{0}$. Tada

$$(E+F)^2 = (E+F)(E+F) = E^2 + \underbrace{EF}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{FE}_{=\mathbf{0}} + F^2 = E^2 + F^2 = E + F$$

Prema tome $E+F$ jest projektor.

„$\Rightarrow$" Obrnuto, pretpostavimo da je $E+F$ projektor.

$$(E+F)^2 = E+F \Rightarrow E^2 + EF + FE + F^2 = E + F \Rightarrow$$

$$E + EF + FE + F = E + F \Rightarrow EF + FE = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(EF+FE) = \mathbf{0} \text{ i } (EF+FE)E = \mathbf{0}$$

(projektor pomnožen sa $\mathbf{0}$ je $\mathbf{0}$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E^2F + EFE = EFE + FE^2 \Rightarrow EF = FE$$

Kako je $EF + FE = 0$ to je $EF = \mathbf{0} = FE$.

Prema tome, $P = E+F$ je projektor akko $EF = FE = \mathbf{0}$.

(#) Na osnovu uslova iz prethodnog zadatka (za realan (ili kompleksan) vektorski prostor, neka je E projektor na $\mathcal{X}_1$ paralelno sa $\mathcal{Y}_1$, i F projektor na $\mathcal{X}_2$ paralelno sa $\mathcal{Y}_2$. Znamo da je $E+F$ projektor ako i samo ako $EF=FE=0$) dokazati da

$$im(E+F)=\mathcal{X}_1\oplus\mathcal{X}_2 \quad i \quad ker(E+F)=\mathcal{Y}_1\cap\mathcal{Y}_2.$$

Rj.

Znamo da: <u>Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$ i P projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$ tada $im(P)=\{x \mid Px=x\}$.</u>

Neka je $P=E+F$.

Prvo pokažimo da je $im(P)=\mathcal{X}_1\oplus\mathcal{X}_2$. Izaberimo proizvoljan $z\in im(P)$. $\quad z\in im(P) \Leftrightarrow Pz=z$

Svaki vektor z za koji vrijedi $Pz=z$ napišimo u obliku $z=x_1+y_1$ i $z=x_2+y_2$ gdje su $x_i\in\mathcal{X}_i$ i $y_i\in\mathcal{Y}_i$. Tada $Ex_1=x_1$, $Ey_1=0$, $Fx_2=x_2$ i $Fy_2=0$. Sad imamo

$$z\in im(P) \Rightarrow Pz=z \Rightarrow (E+F)z=z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E+F)(x_2+y_2)=x_2+y_2 \Rightarrow Ez+\underbrace{Fz}_{=x_2}=x_2+y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ez=y_2 \Rightarrow x_1=y_2$$

$$z=x_1+x_2\in\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2 \Rightarrow im(P)\subseteq\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2 \quad \ldots(*)$$

Obrnuto, $\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2\subseteq im(P)$ zato što

$$z\in\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2 \Rightarrow z=x_1+x_2 \text{ gdje je } x_1\in\mathcal{X}_1 \text{ i } x_2\in\mathcal{X}_2$$

$$\Rightarrow x_1=Ex_1 \quad i \quad x_2=Fx_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad Fx_1 = FEx_1 = 0 \quad i \quad Ex_2 = EFx_2 = 0$

$\Rightarrow \quad P(z) = (E+F)(x_1+x_2) = x_1 + x_2 = z$

$\Rightarrow \quad z \in im(P) \quad \ldots (**)$

Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $im(P) = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \quad \ldots (1)$

Da su $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ disjunktni slijedi iz

$$z \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 \Rightarrow Ez = z = Fz \Rightarrow z = \underbrace{EF}_{=0} z = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = 0 \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $im(P) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$

Na kraju da bi pokazali da je $ker(P) = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ pišemo: Izaberimo proizvoljno $z \in ker(P) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Pz = 0 \Rightarrow (E+F)z = 0 \Rightarrow Ez = -Fz$$

$$\Rightarrow E^2 z = -EFz \quad ; \quad FEz = -F^2 z$$

$$\Rightarrow Ez = -\underbrace{EF}_{=0} z \quad i \quad \underbrace{FE}_{=0} z = -Fz$$

$$\Rightarrow Ez = 0 \quad i \quad 0 = Fz \Rightarrow z \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$$

tj. $ker(P) \subseteq \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$

Slično se pokaže da je $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 \subset ker(P)$ (za vježbu)

Prema tome $ker(P) = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$.

Zadaci za vežbu

1. Neka su P i Q projektori.

(a) Dokazati da $im(P) = im(Q)$ akko $PQ = Q$ i $QP = P$.

(b) Dokazati da $ker(P) = ker(Q)$ akko $PQ = P$ i $QP = Q$.

(c) Dokazati da ako $E_1, E_2, \ldots, E_k$ su projektori istog ranga i ako $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ su skalari takvi da $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$ tada je $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j E_j$ projektor

2. Dokazati da $rang(P) = trag(P)$ za svaki projektor P definisan na $\mathbb{R}^n$.

3. Za realni (ili kompleksni) vektorski prostor, neka je E projektor na $\mathcal{X}_1$ paralelno sa $\mathcal{Y}_1$, i neka je $\mathbb{F}$ projektor na $\mathcal{X}_2$ paralelno sa $\mathcal{Y}_2$. Dokazati da ako je $EF = P = FE$, tada je P projektor na $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ paralelno sa $\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2$.